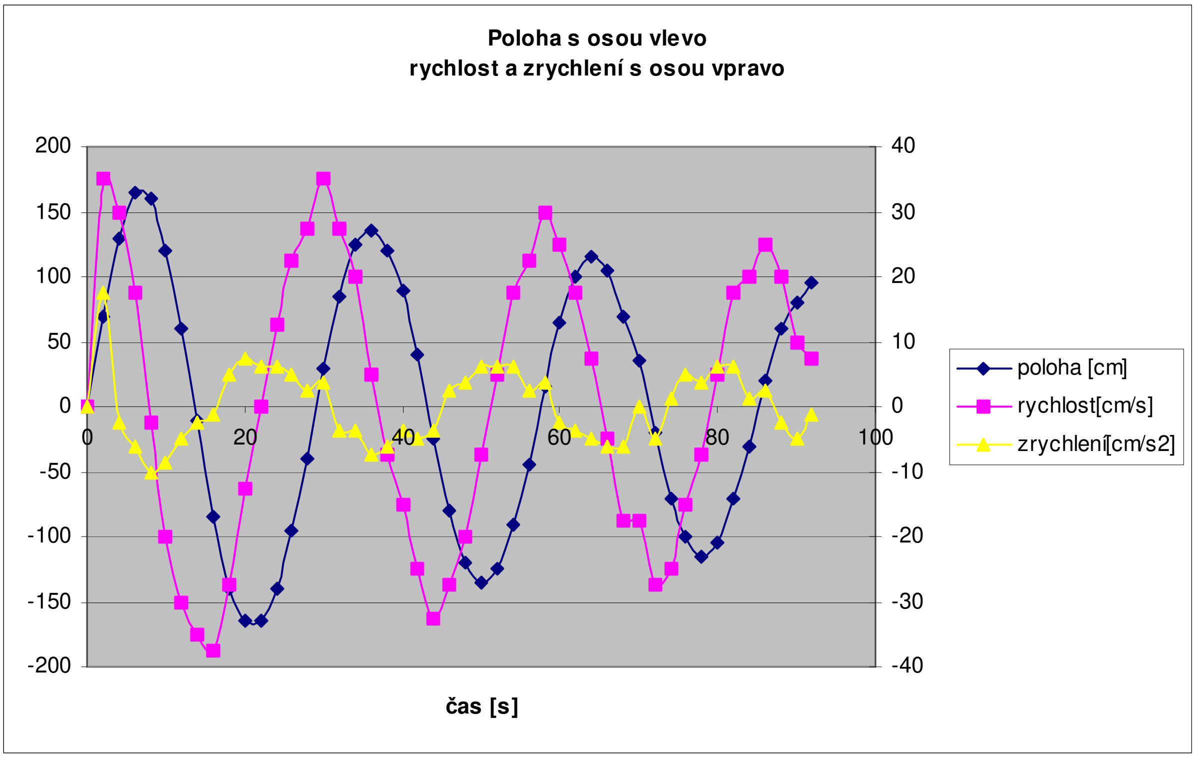
3.1.3 Rychlost a zrychlení harmonického pohybu

Předpoklady: 3102

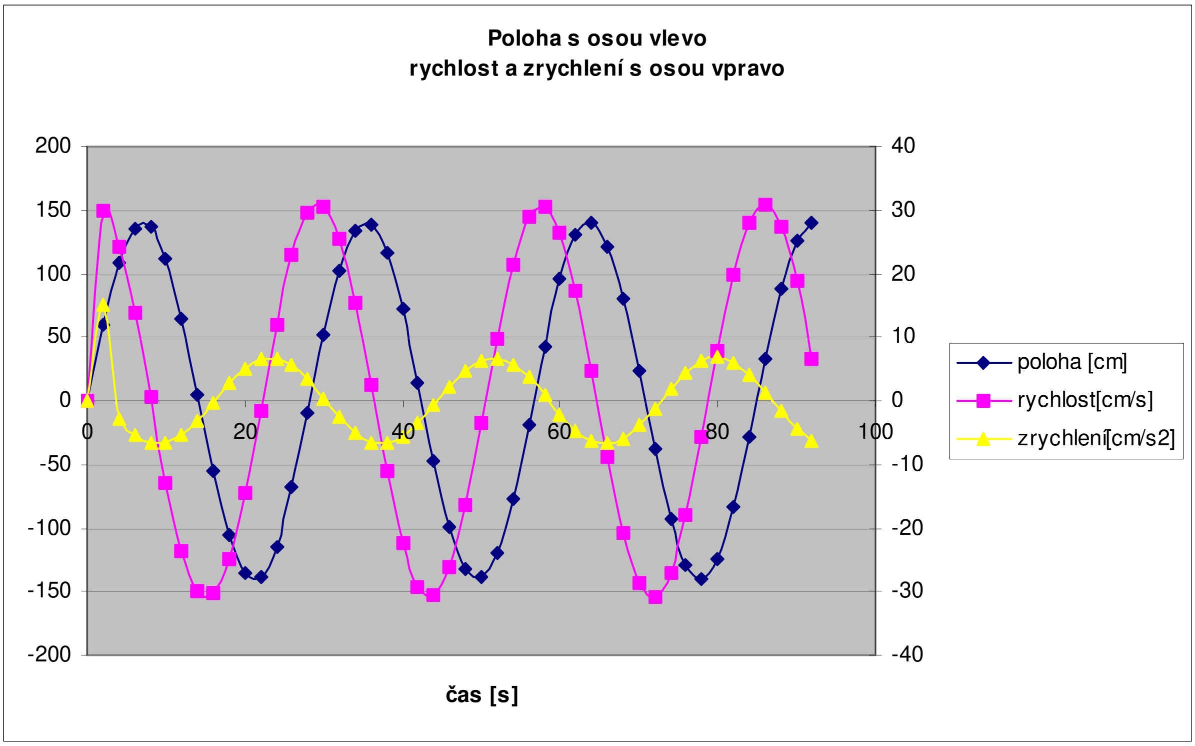
Kromě dráhy (výchylky) popisujeme pohyb i pomocí dalších dvou veličin: rychlosti a zrychlení. Jak budou vypadat jejich rovnice?

Společný graf výchylky, rychlosti a zrychlení koštěte (naměřené hodnoty)



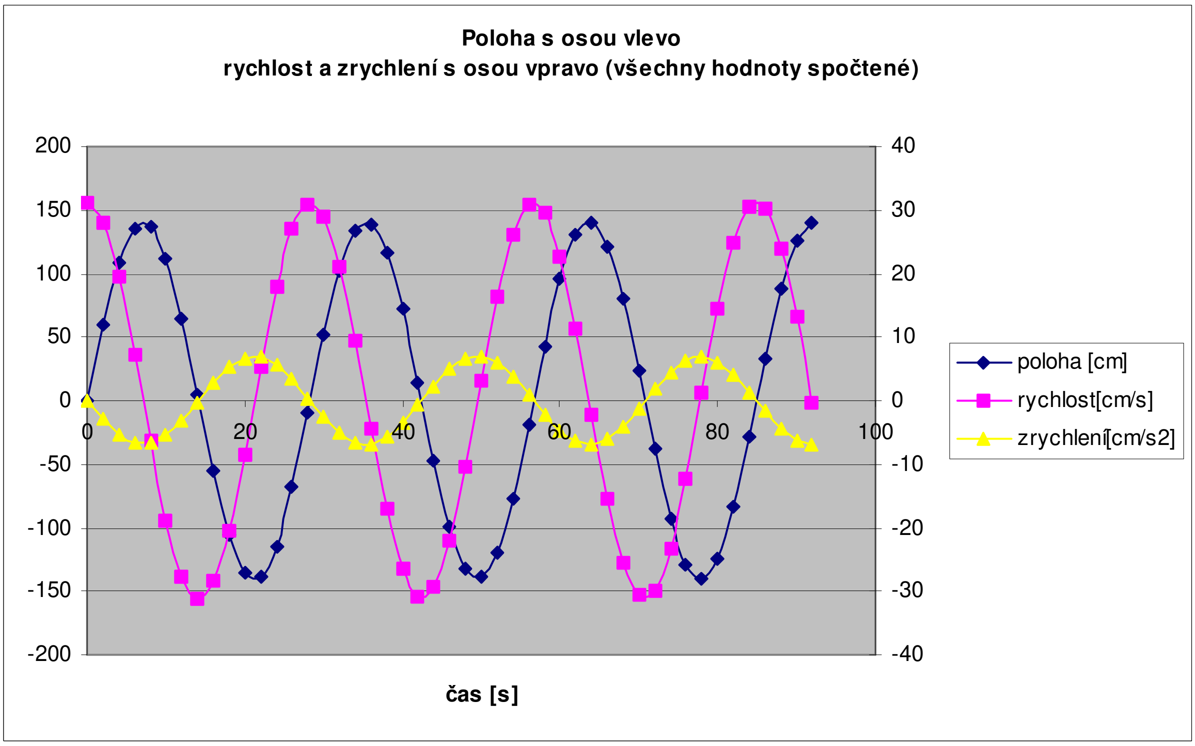
Zdá se, že i ostatní pohybové veličiny mají tvar sinusoid, se stejnou frekvencí, ale s jinou výškou a jiným posunutím. Postřeh ověříme na grafu z vypočtených hodnot.

Společný graf výchylky, rychlosti a zrychlení koštěte (vypočtené hodnoty)



Pokud počítáme rychlost a zrychlení z ideálních (vypočtených) hodnot, grafy rychlost i zrychlení se vyhladí a získají tvar dokonalých sinusovek. Kvůli velkému časovému úseku při výpočtu jsou v grafu dvě chyby – špatný tvar křivek na počátku a malé posunutí po časové ose.

Společný graf výchylky, rychlosti a zrychlení koštěte (vypočtené hodnoty opravené)



Rovnice pro výchylku: $y = y_m \cdot \sin(\omega \cdot t)$.

Hledáme **vztah pro okamžitou rychlost** $v=$:

- jiná výška $\Rightarrow$ místo y_m použijeme v_m,
- stejná úhlová frekvence,
- graf začíná v maximální výchylce jako funkce $y=\cos x$,

$\Rightarrow v=v_m\cdot\cos(\omega\cdot t)$.

Hodnota v_m musí být určena parametry pohybu y_m a ω.

Větší výchylka, větší frekvence ($\Rightarrow$ kratší perioda) $\Rightarrow$ kyvadlo se musí pohybovat rychleji, aby za periodu stačilo udělat kmit $\Rightarrow$ $v_m=y_m\omega$.

Rovnice okamžité rychlosti harmonického pohybu: $v=y_m\omega\cos(\omega\cdot t)$**.**

Př. 1: Urči maximální rychlost koštěte a porovnej vypočtenou hodnotu s hodnotou v grafu. Pro výpočet využij hodnoty získané v minulé hodině ($y_m=140\,\text{cm}$, $T=28{,}3\,\text{s}$).

$y_m=140\,\text{cm}$, $\omega=2\pi f=2\pi\frac{1}{T}=2\pi\frac{1}{28{,}3}\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}=0{,}22\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$

$v_m=y_m\omega=140\cdot0{,}22\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}=31\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$

Vypočtená hodnota odpovídá nejen hodnotám maximální rychlosti vypočtené z ideálních hodnot výchylek, ale i hodnotám vypočteným z původních naměřených hodnot.

Hledáme **vztah pro okamžité zrychlení** $a=$:

- jiná výška $\Rightarrow$ místo y_m použijeme a_m,
- stejná úhlová frekvence,
- graf jde opačným směrem než graf výchylky $\Rightarrow$ jako funkce $y=-\sin x$.

$\Rightarrow a=a_m\cdot\left[-\sin(\omega\cdot t)\right]=-a_m\sin(\omega\cdot t)$

Hodnota a_m musí být určena parametry pohybu v_m a ω $\Rightarrow$ $a_m=v_m\omega=y_m\omega^2$.

Logické: větší maximální rychlost a frekvence ($\Rightarrow$ kratší perioda) $\Rightarrow$ kyvadlo musí rychleji měnit rychlost, aby za periodu stačilo udělat kmit.

Rovnice okamžitého zrychlení harmonického pohybu: $a=-y_m\omega^2\sin(\omega\cdot t)$.

Př. 2: Urči maximální zrychlení koštěte a porovnej vypočtenou hodnotu s hodnotou v grafu. Pro výpočet využij hodnoty získané v minulé hodině ($y_m=140\,\text{cm}$, $T=28{,}3\,\text{s}$).

$y_m=140\,\text{cm}$, $\omega=0{,}22\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$

$a_m=y_m\omega^2=140\cdot0{,}22^2\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-2}=6{,}9\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-2}$

Vypočtená hodnota odpovídá nejen hodnotám maximálního zrychlení vypočteného z ideálních hodnot výchylek, ale i hodnotám vypočteným z původních naměřených hodnot.

Př. 3: Vypočti hodnotu okamžité rychlosti a okamžitého zrychlení koštěte v 50 s. Spočtené výsledky porovnej s naměřenými hodnotami.

koště: $y_m=140\,\text{cm}$, $\omega=0{,}22\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$

rychlost: $v_{50}=y_m\omega\cos(\omega\cdot t)=140\cdot0{,}22\cdot\cos(0{,}22\cdot50)=0{,}14\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$

Naměřená hodnota $v_{50} = -7,5\,\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, vypočtená hodnota odpovídá naměřené hodnotě, koště se nachází téměř v maximální poloze, rychlost by měla být přibližně nulová.

zrychlení: $a_{50} = -y_m\omega^2 \sin(\omega\cdot t) = -140\cdot 0,22^2\cdot\sin(0,22\cdot 50) = 6,9\,\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-2}$

Naměřená hodnota $a_{50} = 6,25\,\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-2}$, vypočtená hodnota odpovídá naměřené hodnotě, koště se nachází téměř v maximální poloze, zrychlení by mělo být přibližně maximální.

Pedagogická poznámka: Při průchodu se třídou 4.2013 jsme získali kvůli rozdílům v zaokrouhlování několik podstatně se lišících výsledků pro rychlost:

$$v_{50} = y_m\omega\cos(\omega\cdot t) = 140\cdot 0,22\cdot\cos(0,22\cdot 50) = 0,14\,\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

$$v_{50} = y_m\omega\cos(\omega\cdot t) = 140\cdot 0,222\cdot\cos(0,222\cdot 50) = 3,24\,\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

$$v_{50} = y_m\omega\cos(\omega\cdot t) = 140\cdot\frac{2\pi}{28,3}\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{28,3}\cdot 50\right) = 3,27\,\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

$$v_{50} = y_m\omega\cos(\omega\cdot t) = 140\cdot 0,22\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{28,3}\cdot 50\right) = 3,24\,\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

$$v_{50} = y_m\omega\cos(\omega\cdot t) = 140\cdot\frac{2\pi}{28,3}\cdot\cos(0,22\cdot 50) = 3,24\,\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

Můžete s žáky rozvinout diskusi o tom, proč se stejná míra zaokrouhlení projeví u počáteční rychlosti daleko méně než u úhlové frekvence (počítáme rychlost po téměř dvou periodách a proto se chyba "počítala" dvakrát).

Př. 4: Struna na kytaře kmitá pokud hrajeme tón a^1 s frekvencí 440 Hz. Urči maximální rychlost a maximální zrychlení jejího pohybu, pokud kmitá s maximální výchylkou 2 mm.

$f = 440\,\mathrm{Hz}$, $y_m = 2\,\mathrm{mm} = 0,002\,\mathrm{m}$

$\omega = 2\pi f = 2\pi 440 = 880\pi\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1} = 2765\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

$v_m = y_m\omega = 0,002\cdot 2765\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1} = 5,5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

$a_m = y_m\omega^2 = 0,002\cdot 2765^2\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2} = 15000\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$

Hlavně maximální zrychlení dosahuje překvapivé hodnoty, která odpovídá velké frekvenci pohybu (je způsobena velkou silou působící na malou hmotnost struny).

Př. 5: Popiš slovně, jak se mění okamžitá výchylka, okamžitá rychlost i okamžité zrychlení závaží při jeho kmitavém pohybu na pružině. Ve kterých polohách je rychlost závaží maximální? Ve kterých polohách je zrychlení závaží maximální. Zdůvodni i pomocí Newtonových pohybových zákonů.

Pohyb můžeme rozdělit do čtyř fází.
Závaží jde z rovnovážné polohy nahoru:

- zvětšují se kladné výchylky závaží,
- rychlost se zmenšuje (výsledná síla působící na závaží směřuje dolů),
- zrychlení je záporné se zvětšující se hodnotou (pružina se zkracuje a tím se zvětšuje výsledná síla působící na závaží směrem dolů),
- v maximální kladné výchylce se závaží na okamžik zastaví, jeho rychlost se mění s největším záporným zrychlením (pružina je maximálně zkrácena a na závaží působí maximální výsledná síla směrem dolů).

Závaží jde z maximální kladné výchylky dolů do rovnovážné polohy:

- zmenšují se kladné výchylky závaží,
- rychlost má záporné znaménko, její velikost se zvětšuje (výsledná síla působící na závaží směřuje dolů),
- zrychlení je záporné se zmenšující se hodnotou (pružina se prodlužuje a tím se zmenšuje výsledná síla působící na závaží směrem dolů),
- v rovnovážné poloze je výchylka nulová, rychlost je záporná s největší hodnotou a zrychlení je nulové.

Závaží jde z rovnovážné polohy dolů:

- zvětšují se záporné výchylky závaží,
- rychlost má záporné znamínko, její velikost se zmenšuje (výsledná síla působící na závaží směřuje nahoru),
- zrychlení je kladné se zvětšující se hodnotou (pružina se prodlužuje a tím se zvětšuje výsledná síla působící na závaží směrem nahoru),
- v maximální záporné výchylce se závaží na okamžik zastaví, jeho rychlost se mění s největším kladným zrychlením (pružina je maximálně prodloužena a na závaží působí maximální výsledná síla směrem nahoru).

Závaží jde z maximální záporné výchylky nahoru do rovnovážné polohy:

- zmenšují se záporné výchylky závaží,
- rychlost má kladné znaménko, její velikost se zvětšuje (výsledná síla působící na závaží směřuje nahoru),
- zrychlení je záporné se zmenšující se hodnotou (pružina se zkracuje a tím se zmenšuje výsledná síla působící na závaží směrem nahoru),
- v rovnovážné poloze je výchylka nulová, rychlost je kladná s největší hodnotou a zrychlení je nulové.

Maximální rychlost má závaží vždy při průchodu rovnovážnou polohou.
Maximální zrychlení má závaží vždy v krajních polohách.

Shrnutí: Při harmonickém kmitavém pohybu jsou i okamžité hodnoty rychlosti a zrychlení popsány pomocí goniometrických funkcí o stejné úhlové frekvenci.